SESSION DE 1978

MATHÉMATIQUES

Épreuve n° 2

DURÉE : 3 heures

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Les candidats sont invités à répondre à chaque question posée avec rigueur et concision.

La notation ${}^tV$ *désigne la transposée de la matrice* V.

Le terme (n, r) *matrice désigne une matrice à* n *lignes et* r *colonnes.*

PREMIÈRE PARTIE

Soit E_n l'espace R^n muni d'une structure euclidienne. $< \vec{v_1} | \vec{v_2} >$ représente le produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, et $\|\vec{v}\|$ la norme euclidienne du vecteur $\vec{v}$.

1° Les plans vectoriels Π_1 et Π_2 étant définis dans une base orthonormée de E_3 par les équations $x + y - z = 0$ et $x - 2y + z = 0$, déterminer une base de leur intersection et le cosinus de l'angle de leurs vecteurs normaux.

2° On considère dans E_n une base B orthonormée et un sous-espace vectoriel L de dimension r, dont $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r})$ est une base orthonormée. On note V la (n, r) matrice des composantes de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}$ dans la base B.

Soit p la projection orthogonale sur L définie par la condition :

pour tout $\vec{u} \in E_n$, $p(\vec{u})$ est le vecteur de L tel que $\vec{u} - p(\vec{u})$ est orthogonal à L.

P désigne la matrice de p dans B.

a. Calculez ${}^tVV$.

b. Pour $\vec{u} \in E_n$, montrer que

$$p(\vec{u}) = < \vec{u} | \vec{v_1} > \vec{v_1} + \ldots + < \vec{u} | \vec{v_r} > \vec{v_r}.$$

Si U est la matrice colonne des composantes de $\vec{u}$ dans B, montrer que ${}^tVU$ est la matrice des composantes de $p(\vec{u})$ dans $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}$. En déduire que $P = V{}^tV$.

3° L_1 et L_2 sont 2 sous-espaces vectoriels de E_n et p_1 et p_2 les projections orthogonales sur L_1 et L_2.

a. Soit $f_1 = p_1 \circ p_2 \circ p_1$.

Montrer que f_1 est un endomorphisme symétrique.

Comparer $\|f_1(\vec{u})\|$ à $\|\vec{u}\|$ et étudier le signe de $< f_1(\vec{u}) | \vec{u} >$ pour $\vec{u} \in E_n$.

En déduire que toutes les valeurs propres de f_1 sont comprises entre 0 et 1.

b. Soit $E(\lambda) = \{ \vec{u} \in E_n | f_1(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \}$.

Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de f_1, $E(\lambda) \subset L_1$.

Expliciter $E(1)$.

c. $p_1 \circ p_2$ est-il symétrique? Montrer que les valeurs propres non nulles et les vecteurs propres associés pour f_1 et $p_1 \circ p_2$ sont identiques.

d. Soit $f_2 = p_2 \circ p_1 \circ p_2$ et $\vec{u}$ un vecteur propre unitaire de f_1 relatif à une valeur propre non nulle (donc $\vec{u} \in L_1$), $\vec{u'}$ est défini par $\vec{u'} = \dfrac{p_2(\vec{u})}{\|p_2(\vec{u})\|}$.

Montrer que $\vec{u'}$ est vecteur propre de f_2 relatif à λ, que

$$\vec{u} = \frac{p_1(\vec{u'})}{\|p_1(\vec{u'})\|}.$$

En déduire que λ est le carré du cosinus de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.

4° *Application numérique* : En revenant au cas particulier du 1°, déterminer explicitement les matrices P_1 et P_2 des projections orthogonales sur Π_1 et Π_2.

Calculer la matrice de $p_1 \circ p_2$ et retrouver les résultats du 1° par un calcul de valeurs et vecteurs propres. Préciser la nature géométrique du sous-espace propre relatif à 0 pour $p_1 \circ p_2$ et f_1.

.../...

M 72 Concours Commun E.N.S.A.M. 1978

DEUXIÈME PARTIE

Soit A_3 un espace affine euclidien de dimension 3 dont l'espace vectoriel sous-jacent est E_3 ; A_3 est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point M est déterminé par ses coordonnées x, y, z : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. On appelle solide une partie S bornée quarrable de A_3 de volume V et de masse $\hat{\mu} = \mu V$ (μ densité de masse positive, supposée constante ici). G désigne le centre de gravité de S.

Pour $\Omega \in A_3$ on définit sur E_3 une forme bilinéaire symétrique par :

$$\Phi_{\Omega,S}(\vec{u}, \vec{v}) = \mu \iiint_S <\overrightarrow{\Omega M} | \vec{u}> <\overrightarrow{\Omega M} | \vec{v}> dx\, dy\, dz .$$

$q_{\Omega,S}$ est la forme quadratique associée, appelée forme quadratique d'inertie de S en Ω.

1° *a.* Calculer $\iiint_S <\overrightarrow{GM} | \vec{u}> dx\, dy\, dz$ pour $\vec{u} \in E_3$. On commencera par les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

b. Montrer que

$$\Phi_{\Omega,S}(\vec{u}, \vec{v}) = \Phi_{G,S}(\vec{u}, \vec{v}) + \hat{\mu} <\overrightarrow{\Omega G} | \vec{u}> <\overrightarrow{\Omega G} | \vec{v}> , \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3$$

c. Quelles intégrales faut-il calculer pour déterminer la matrice de $q_{O,S}$ dans la base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$? Que représentent les éléments de la diagonale?

d. Soit C la matrice colonne des coordonnées de G dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Montrer que si $Q_{O,S}$ et $Q_{G,S}$ sont les matrices de $q_{O,S}$ et $q_{G,S}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$Q_{O,S} = Q_{G,S} + \hat{\mu} C {}^t C$$

2° *a.* Soit E l'ellipsoïde défini dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \quad (a \geqslant b \geqslant c > 0),$$

de densité de masse ρ constante.

Calculer la masse totale $\hat{\mu}_E$ de E et la matrice $Q_{O,E}$ de $q_{O,E}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (On remarquera qu'aux coefficients a, b, c près, x, y et z jouent des rôles similaires.)

b. Montrer que pour un solide S quelconque il existe toujours une base orthonormée $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ de E_3 et des constantes a, b, c et ρ telles que :

$\hat{\mu} = \hat{\mu}_E$ calculée au 2° *a*;

la matrice de $q_{G,S}$ dans $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est égale à la matrice $Q_{O,E}$ du 2° *a*.

On calculera a, b, c et ρ en fonction de $\hat{\mu}$ et des valeurs propres $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ distinctes ou non de $Q_{G,S}$.

Montrer qu'alors la forme quadratique d'inertie de S en un point Ω est identique à celle d'un ellipsoïde E_S défini dans le repère $(G, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} \leqslant 1$$

et de densité de masse ρ.

3° *Application numérique.*

S est défini dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par $x + y + z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ et sa densité de masse vaut 6.

Calculer la masse de S et la matrice $Q_{O,S}$. En déduire $Q_{G,S}$ et l'ellipsoïde E_S.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail